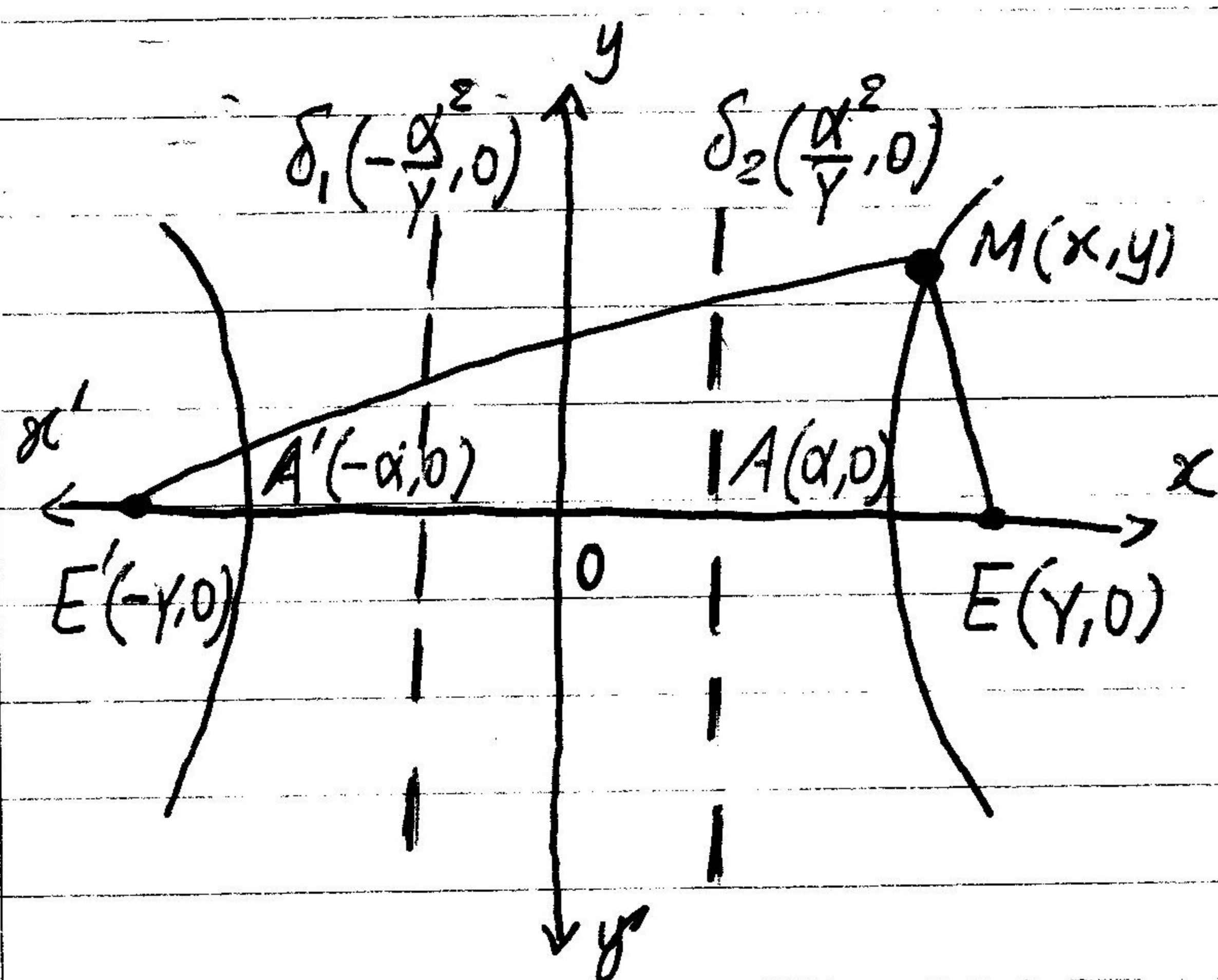


• Υπερβολή

Ορισμός: Καλώ υπερβολή, το γεωμετρικό τόπο των σημείων των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία, είναι σταθερή. Οι άνωδι αποστάσεις καλούνται εστιακές ακτίνες, ενώ τα άνωδι σταθερά σημεία, καλούνται εστί της υπερβολής.



$$||\vec{ME}| - |\vec{ME}'|| = 2a$$

Διευθετούσες:

$$\begin{cases} \delta_1 = -\frac{a^2}{y} \\ \delta_2 = \frac{a^2}{y} \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \xrightarrow[\text{εφαρμογής}]{\text{εξίσωση}} \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

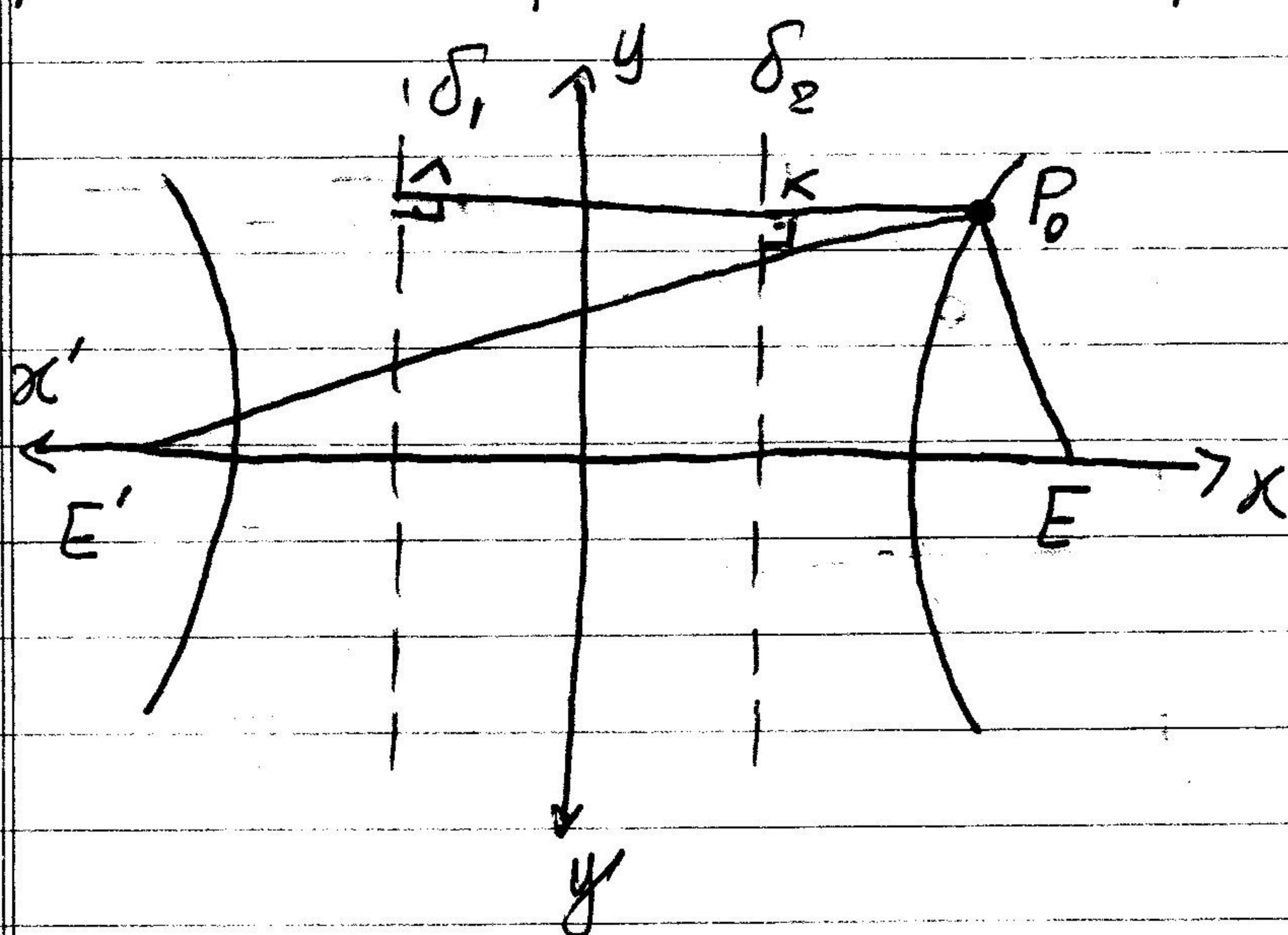
✓ Άξονας συμμετρίας της υπερβολής είναι αυτός στον οποίο αντιστοιχεί το (-) στην εξίσωση υπερβολής.
Η υπερβολή δεν τέμνει τον άξονα συμμετρίας της.

Έστω $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, άξονα συμμετρίας τον yy' .

Για $x=0$, έχω $-\frac{y^2}{b^2} = 1 \leadsto -y^2 = b^2$, αδύνατο για $b > 0$.

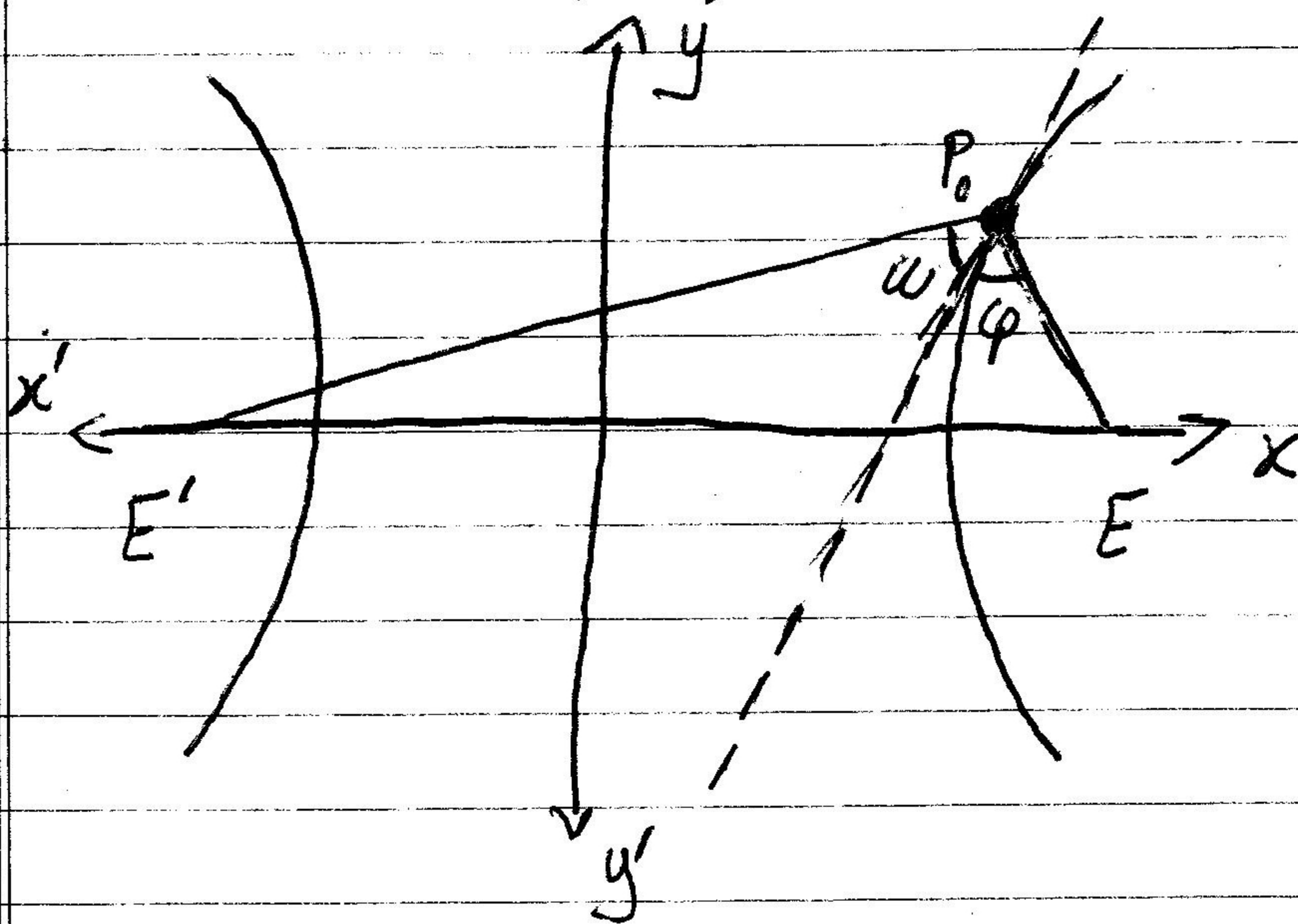
Εκκεντρότητα υπερβολής: $e = \frac{Y}{\alpha}$.

Θεώρημα 1: Ο λόγος των αποστάσεων τυχόντος σημείου $P_0(x_0, y_0)$ μιας υπερβολής από εστία E και αντεστोιχη διευθετούσα δ_2 είναι σταθερός και ίσος με την εκκεντρότητα της υπερβολής.



$$\frac{|P_0 E|}{|P_0 \delta_2|} = \frac{|P_0 E'|}{|P_0 \delta_1|} = \frac{Y}{\alpha}$$

Θεώρημα 2: Η εφαπτομένη μιας υπερβολής σε σημείο $P_0(x_0, y_0)$ -αυτής, διχοτομεί τη γωνία των εστιακών ακτίνων της υπερβολής.



$$\hat{\omega} = \hat{\varphi}$$

Ασύμμετρες υπερβολής :

Ορισμός: Καλώ ασύμμετρες ευθείες μιας υπερβολής, έχω $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, το σύνολο των ευθειών

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \right\} \Leftrightarrow \left\{ y = \frac{b}{a} x \text{ ή } y = -\frac{b}{a} x \right\}$$

(Ομοίως, αν έχω την υπερβολή $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$,

οι ασύμμετρες αυτής ευθείες, είναι οι $x = \pm \frac{b}{a} y$)

Σχόλιο: Αν $a=b$, η υπερβολή καλείται ισοσκελής κι έχει εξίσωση:

$x^2 - y^2 = 1$ ή $y^2 - x^2 = 1$,
αναλόγως τον άξονα συμμετρίας της υπερβολής

Άσκηση: Μας προσδιορίζουν τόσο η εκκεντρότητα όσο κι οι διευθετούσες της υπερβολής, εξίσωσης $x^2 - 4y^2 + 6x + 16y - 11 = 0$

Λύση: Είναι, $x^2 - 4y^2 + 6x + 16y - 11 = 0 \Leftrightarrow$

$$x^2 + 6x + 9 - 9 - 4(y^2 - 4y + 4 - 4) - 11 = 0 \Leftrightarrow$$

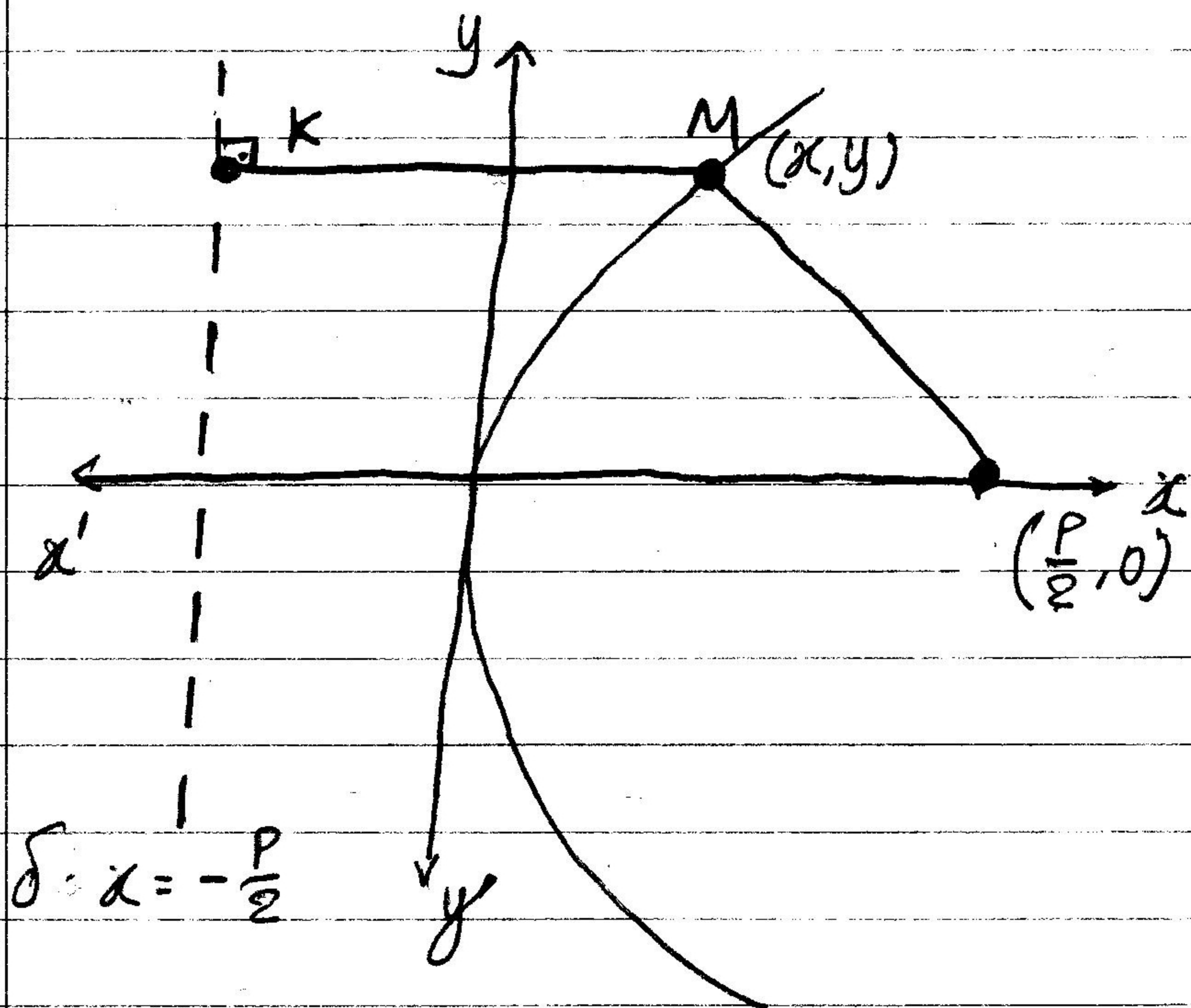
$$(x+3)^2 - 4(y-2)^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{(x+3)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{1} = 1$$

, άρα $a=2$ και $b=1$, οπότε $\gamma^2 = b^2 + a^2 \sim \gamma = \sqrt{3}$,
οπότε $\varepsilon = \frac{\gamma}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ενώ οι διευθετούσες αυτής

$$\text{είναι οι: } x+3 = \pm \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

• Παραβολή

Ορισμός: Καλή παραβολή, το γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου, τα οποία ισαπέχουν από σταθερό σημείο αυτού και δοσμένη ευθεία αυτού.



$$|\overrightarrow{ME}| = |\overrightarrow{MK}|$$

$$\text{Εξίσωση } y^2 = 2px$$

Εξ. εφαπτομένης

$$yy_0 = p(x + x_0)$$

Επιφάνειες $\mathbb{R}^3$

Ορισμός: Επιφάνεια καλείται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ικανοποιούν την εξίσωση $\varphi(x, y, z) = 0$ (δηλαδή $U_\varphi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \varphi(x, y, z) = 0\}$)

(Π.χ η εξίσωση επιπέδου, $Ax + By + Cz + D = 0$)

Καμπύλη
στον $\mathbb{R}^3$

Η τομή δυο επιφανειών, καλείται καμπύλη, κι ορίζεται ως το σύνολο $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \varphi_1(x, y, z) = \varphi_2(x, y, z)\}$, όπου οι φ_1, φ_2 ορίζουν τις αντίστοιχες τεμνόμενες επιφάνειες.

• Σφαίρα: Καλώ σφαίρα, το γεωμετρικό τόπο των σημείων του $\mathbb{R}^3$ τα οποία απέχουν ίση απόσταση από δίδεν σημείο του $\mathbb{R}^3$. Το σημείο αυτό καλείται κέντρο της σφαίρας και η εν λόγω απόσταση, ακτίνα αυτής.

Έστω $K(\alpha, \beta, \gamma)$ το κέντρο της σφαίρας και $\rho > 0$ η ακτίνα αυτής. Βάσει του παραπάνω ορισμού, για τυχόν σημείο (x, y, z) επί της σφαίρας, ισχύει:

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2} = \rho \Leftrightarrow (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = \rho^2,$$

η οποία εξίσωση αντιστοιχεί στην εξίσωση σφαίρας. Αναπτύσσοντας τα τρία τετράγωνα, έχω:

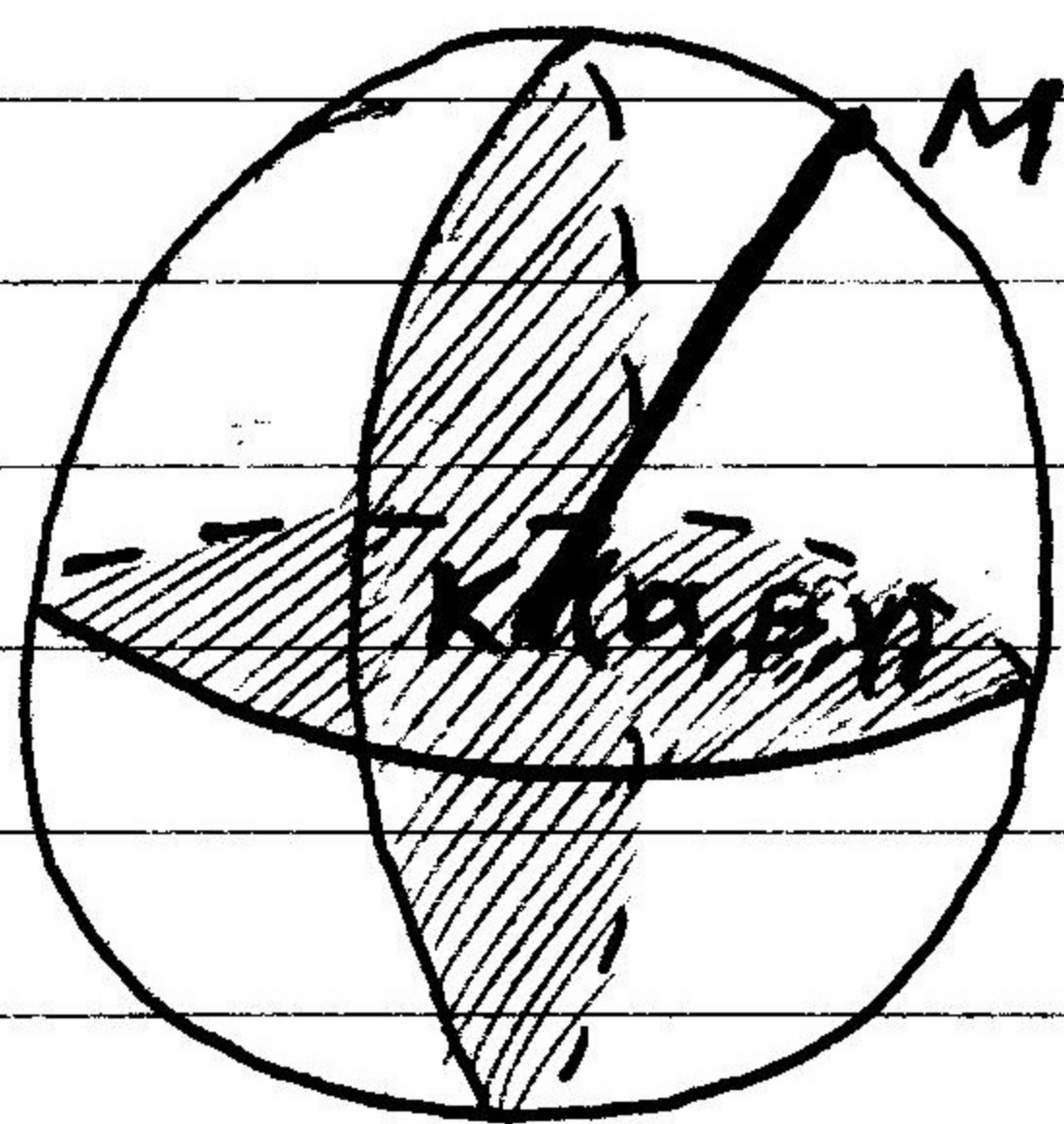
$$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 + z^2 - 2\gamma z + \gamma^2 = \rho^2$$

Θέτοντας, $A = -2\alpha$, $B = -2\beta$, $\Gamma = -2\gamma$, $\Delta = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \rho^2$, έχω:

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + \Delta = 0, \text{ με κέντρο το } \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{\Gamma}{2}\right) \text{ κι ακτίνα } \frac{1}{2} \sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2 - 4\Delta}$$

Από την παραπάνω γραφή, 4 μη συνεπίκεδα σημεία του $\mathbb{R}^3$, ορίζουν σφαίρα. (**)

► Εφαπτόμενο επίπεδο σφαίρας:



Έστω το (Π) εφαπτεται της (Σ)
στο σημείο $M(x_1, y_1, z_1)$ αυτής
Για τον προσδιορισμό του, χρειαζόμαστε
• Ένα σημείο αυτού (το σημείο M)
• Ένα καθετό στο επίπεδο διάνυσμα,
για το οποίο χρησιμοποιώ το διάνυσμα

της ακτίνας $\overrightarrow{KM} = (x_1 - \alpha, y_1 - \beta, z_1 - \gamma)$

Έστω, αν $P(x, y, z)$ σημείο του (Π), θα έχω:

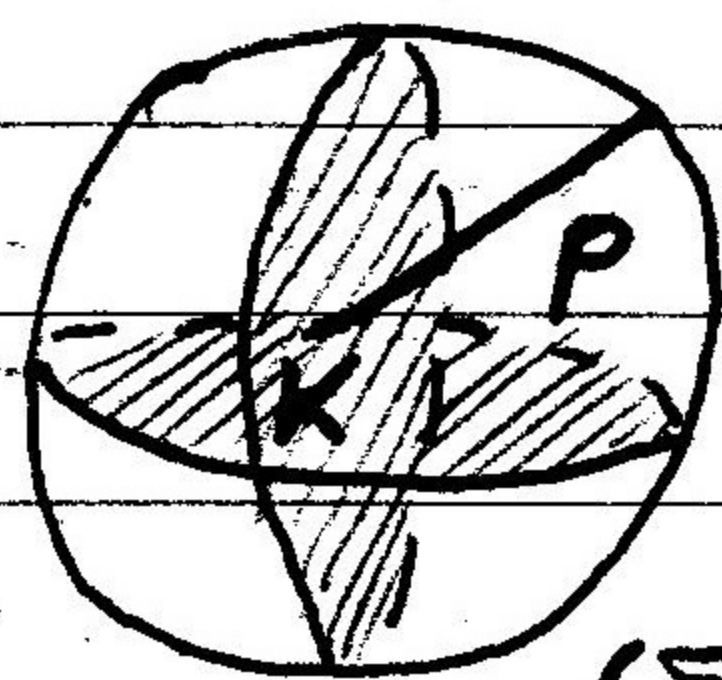
$$\begin{aligned} \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{KM} &= 0 \Leftrightarrow (x - x_1, y - y_1, z - z_1) \cdot (x_1 - \alpha, y_1 - \beta, z_1 - \gamma) \\ &= 0 \Leftrightarrow (x - x_1)(x_1 - \alpha) + (y - y_1)(y_1 - \beta) + (z - z_1)(z_1 - \gamma) = 0 \\ &\Leftrightarrow [(x - \alpha) - (x_1 - \alpha)](x_1 - \alpha) + [(y - \beta) - (y_1 - \beta)](y_1 - \beta) \\ &\quad + [(z - \gamma) - (z_1 - \gamma)](z_1 - \gamma) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - \alpha)(x_1 - \alpha) - (x_1 - \alpha)^2 + (y - \beta)(y_1 - \beta) - (y_1 - \beta)^2 \\ &\quad + (z - \gamma)(z_1 - \gamma) - (z_1 - \gamma)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - \alpha)(x_1 - \alpha) + (y - \beta)(y_1 - \beta) + (z - \gamma)(z_1 - \gamma) = (x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 \\ &\quad + (z_1 - \gamma)^2 \end{aligned}$$

, η οποία αποτελεί τη (γενική) εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στη σφαίρα.

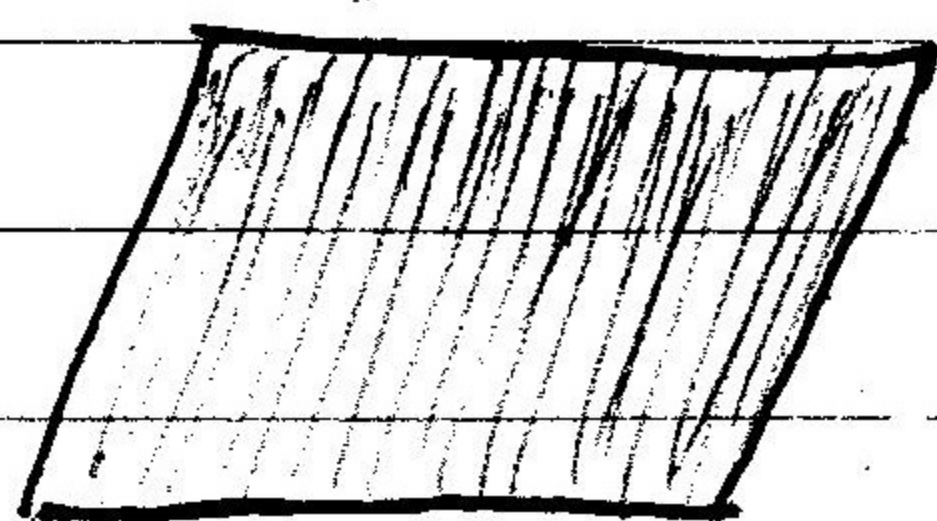
Στην ειδική περίπτωση που $K(0, 0, 0)$, το εφαπτόμενο επίπεδο δίνεται ως $xx_1 + yy_1 + zz_1 = \rho^2$

► Κύκλος (στον $\mathbb{R}^3$) $\longleftrightarrow$ Τομή σφαίρας κι επιπέδου.

Έστω σφαίρα (Σ): $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = \rho^2$
κι επίπεδο (Π): $Ax + By + Cz + D = 0$



(Σ)



(Π)

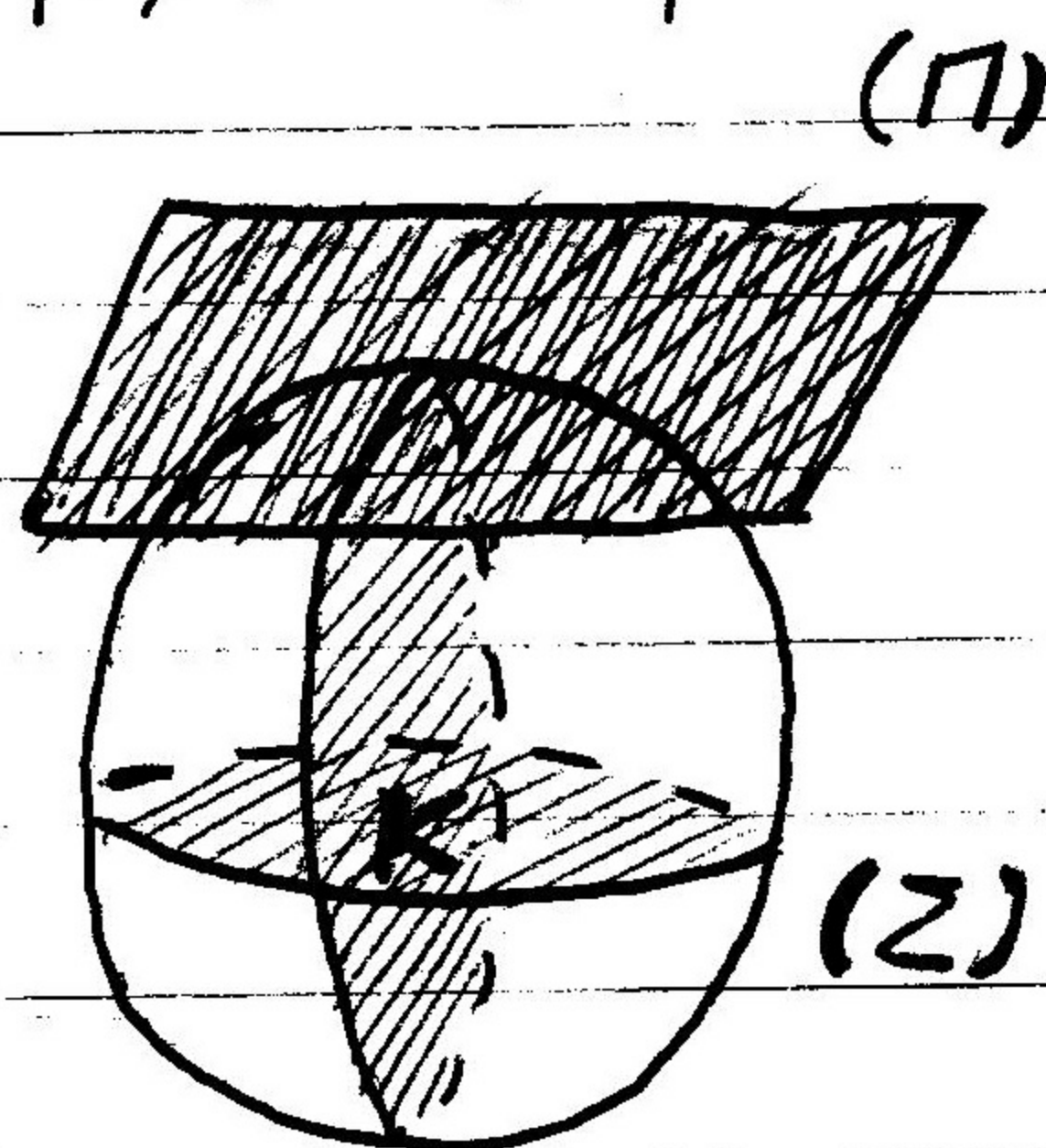
Γνωρίζω ότι αν $K(\alpha, \beta, \gamma)$
τότε $d(K, (\Pi)) =$

$$\frac{|A\alpha + B\beta + \Gamma\gamma + \Delta|}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}$$

οπότε για τη σχετική θέση
σφαίρας - επιπέδου, έχω τα εξής

- Αν $d(K, (\Pi)) > \rho$, σφαίρα κι επίπεδο είναι ξένα.
- Αν $d(K, (\Pi)) = \rho$, σφαίρα κι επίπεδο εφαπτόνται, δηλαδή το (Π) είναι εφαπτόμενο επίπεδο της σφαίρας.
- Αν $d(K, (\Pi)) < \rho$, σφαίρα κι επίπεδο τέμνονται.

Τομή σφαίρας - επιπέδου

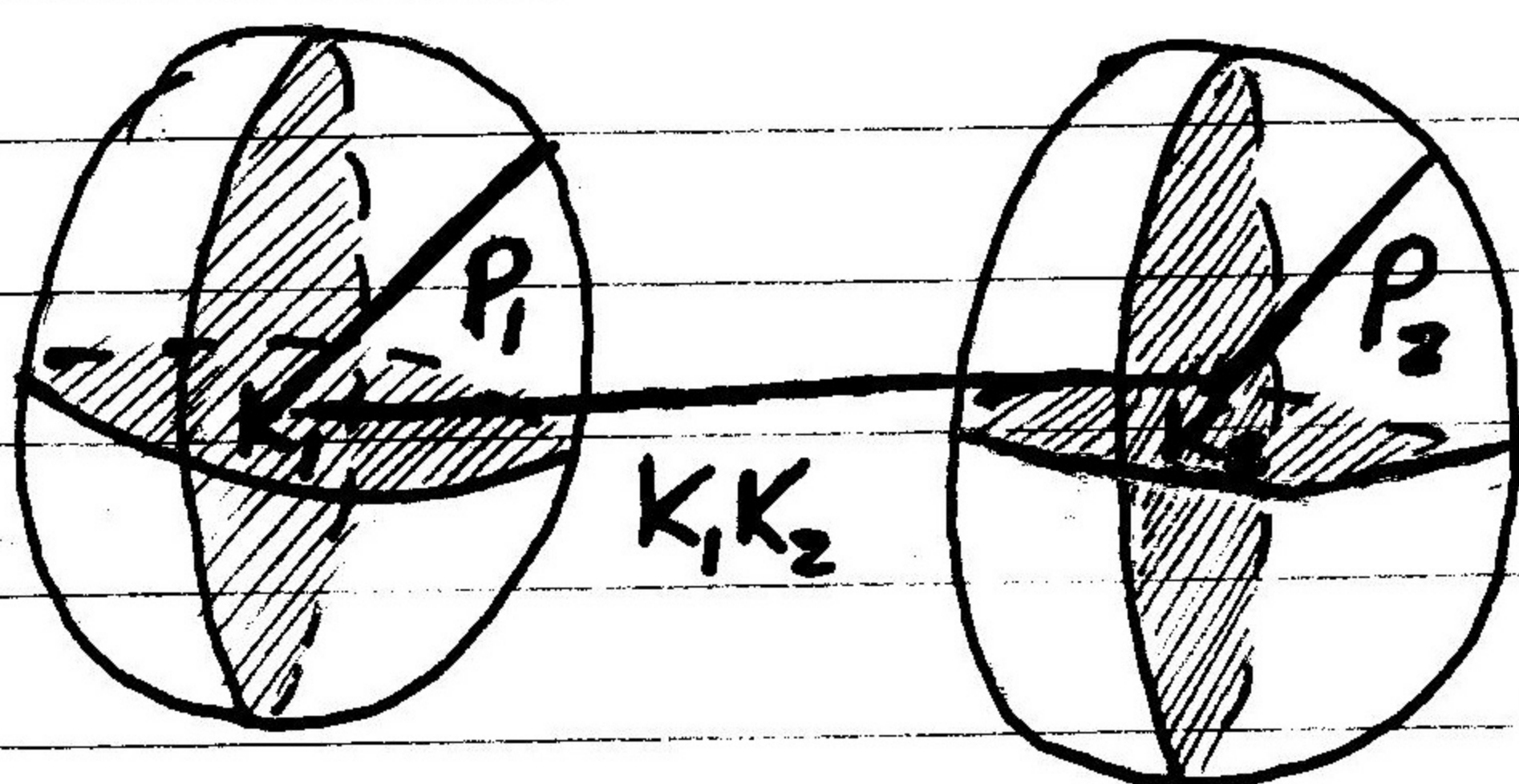


Έστω M τυχαίο σημείο της τομής.
κι έστω A η προβολή του K στο (Π) .
Στο ορθογώνιο τρίγωνο KAM , έχω:
 $|\overline{KM}|^2 = |\overline{MA}|^2 + |\overline{AK}|^2 \leadsto$
 $|\overline{MA}| = \sqrt{\rho^2 - d^2}$ (καθώς $d < \rho$),

άρα έχω το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του (Π)
τα οποία απέχουν σταθερή απόσταση $R = \sqrt{\rho^2 - d^2}$
από σταθερό σημείο A του επιπέδου, δηλαδή πρόκειται
για κύκλο (του επιπέδου (Π)) κέντρου A ακτίνας R .

► Σχετική θέση ^{δύο} σφαιρών.

Έστω $(\Sigma_1): (x - \alpha_1)^2 + (y - \beta_1)^2 + (z - \gamma_1)^2 = \rho_1^2$ και
 $(\Sigma_2): (x - \alpha_2)^2 + (y - \beta_2)^2 + (z - \gamma_2)^2 = \rho_2^2$

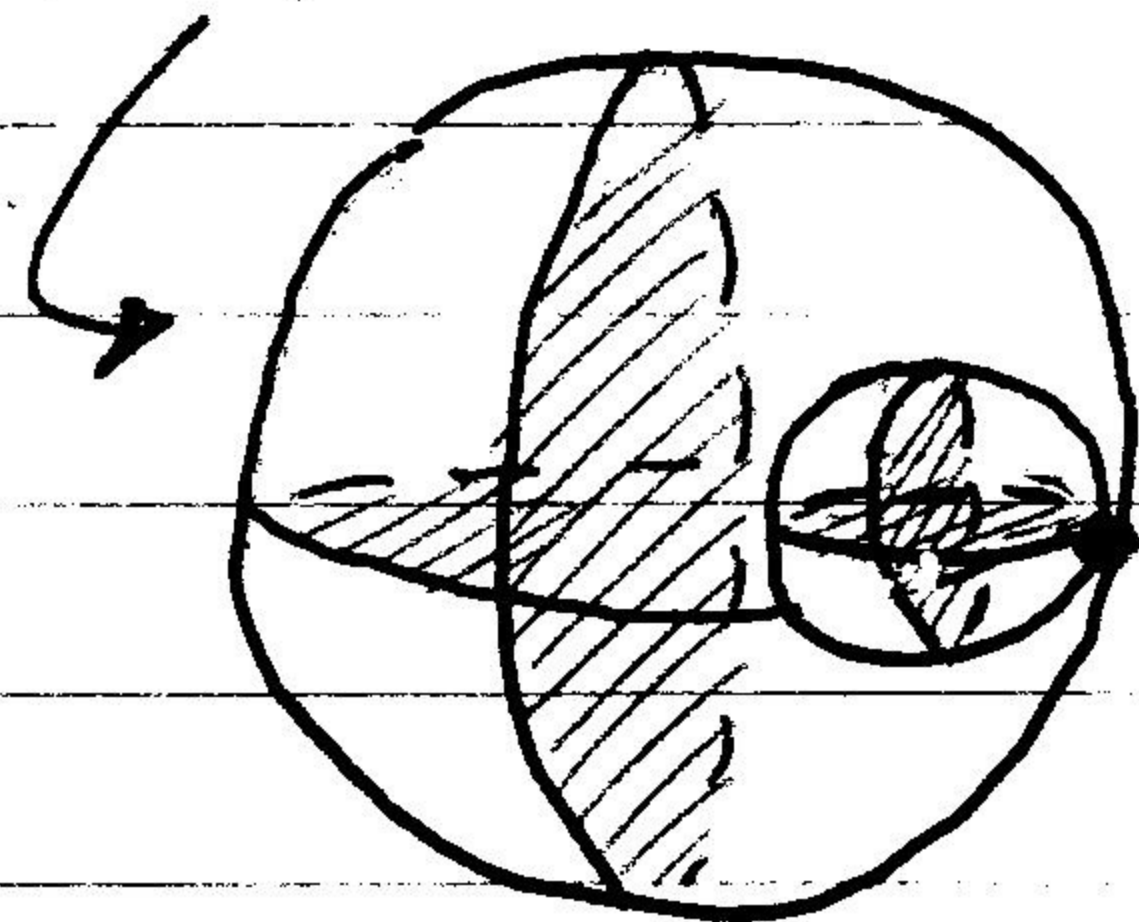


Συσχετίζω τη μεταξύ
τους θέση με το μέτρο
 $|\overline{K_1K_2}| = \sqrt{(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2 - \beta_1)^2 + (\gamma_2 - \gamma_1)^2}$, κι έχω

$$+ (\beta_2 - \beta_1)^2 + (\gamma_2 - \gamma_1)^2, \text{ κι έχω}$$

- Αν $|\overrightarrow{K_1 K_2}| > \rho_1 + \rho_2$, οι σφαίρες είναι ξένες

- Αν $|\overrightarrow{K_1 K_2}| = \rho_1 + \rho_2$, οι σφαίρες εφάπτονται εξωτερικά
 ενώ αν $|\overrightarrow{K_1 K_2}| = |\rho_1 - \rho_2|$ οι σφαίρες εφάπτονται εσωτερικά



- Αν $|\overrightarrow{K_1 K_2}| < \rho_1 + \rho_2$, οι σφαίρες τέμνονται

► Τομή ^{δύο} σφαιρών

$$\begin{cases} (\Sigma_1): (x - \alpha_1)^2 + (y - \beta_1)^2 + (z - \gamma_1)^2 = \rho_1^2 \\ (\Sigma_2): (x - \alpha_2)^2 + (y - \beta_2)^2 + (z - \gamma_2)^2 = \rho_2^2 \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} (\Sigma_1): x^2 + y^2 + z^2 + A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0 \\ (\Sigma_2): x^2 + y^2 + z^2 + A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = 0 \end{cases} \implies$$

$$(\Sigma_1): x^2 + y^2 + z^2 + A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0$$

$$(\Sigma_2 - \Sigma_1): (A_2 - A_1)x + (B_2 - B_1)y + (\Gamma_2 - \Gamma_1)z + (\Delta_2 - \Delta_1) = 0$$

$$\underline{\underline{E = A_2 - A_1, H = B_2 - B_1}}$$

$$\underline{\underline{\Theta = \Gamma_2 - \Gamma_1, I = \Delta_2 - \Delta_1}}$$

$$\begin{cases} (\Sigma_1) \\ Ex + Hy + \Theta z + I = 0 \end{cases}$$

, δηλαδή η τομή δύο σφαιρών ισοδυναμεί με τομή σφαίρας - επιπέδου, δηλαδή κύκλο.

Άσκηση: Να προσδιοριστεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τομής των σφαιρών:

$$\begin{cases} (\Sigma_1): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 8z + 2 = 0 \\ (\Sigma_2): x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y - 7z - 3 = 0 \end{cases}$$

Λύση:

Μέσω συμπλήρωσης τετραγώνων, για την (Σ_1) , έχω:

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 4y + 4 - 4 + z^2 - 8z + 16 - 16 + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 22, \text{ σφαίρα κέντρου } (2, -2, 4), \text{ ακτίνας } \sqrt{22}.$$

Ομοίως, για την (Σ_2) , έχω:

$$x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + y^2 + 2y + 1 - 1 + z^2 - 7z + \frac{49}{4} - \frac{49}{4} - 3 = 0 \Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 + (y+1)^2 + (z - \frac{7}{2})^2 = \frac{66}{4},$$

σφαίρα κέντρου $(\frac{1}{2}, -1, \frac{7}{2})$, ακτίνας $\frac{\sqrt{66}}{2}$.

Είναι:

$$|K_1 K_2| = \sqrt{(\frac{1}{2} - 2)^2 + (-1 + 2)^2 + (\frac{7}{2} - 4)^2} = \frac{\sqrt{14}}{2} < \frac{\sqrt{22}}{2} < \frac{\sqrt{22}}{2} + \frac{\sqrt{66}}{2} = \rho_1 + \rho_2, \text{ άρα οι δύο σφαίρες τέμνονται}$$

Το σύστημα $\begin{cases} (\Sigma_1) \\ (\Sigma_2) \end{cases}$ ισοδυναμεί με το $\begin{cases} (\Sigma_1) \\ (\Sigma_2 - \Sigma_1) \end{cases}$

$$= \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 8z + 2 = 0 \\ 3x - 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$$

Υπολογίζω τώρα την προβολή του κέντρου της (Σ_1) , $(2, -2, 4)$, στο επίπεδο $(\Pi): 3x - 2y + z - 5 = 0$

Έστω $\Lambda(x, y, z)$ η ορθογώνια προβολή του $(2, -2, 4)$ στο (Π)
 $: 3x - 2y + z - 5 = 0$. Θα ισχύουν τα εξής:

$(x-2, y+2, z-4) \parallel (3, -2, 1)$ (= κείμενο διανύσμα του (Π))
 $\Leftrightarrow (x-2, y+2, z-4) = t(3, -2, 1) \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = -2t - 2 \\ z = t + 4 \end{cases}$ (1). Επίσης $\Lambda(x, y, z) \in (\Pi)$, οπότε οι
 συν/νες του επαληθεύουν την εξίσωση του
 (Π) . Είναι δηλαδή:

$$3(3t+2) - 2(-2t-2) + t+4 - 5 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{9}{14} \quad (2)$$

$$\text{Από (1), (2): } \Lambda(x, y, z) = \left(\frac{1}{14}, -\frac{10}{14}, \frac{47}{14} \right),$$

το οποίο αποτελεί το κέντρο του κύκλου της τομής

Η ακτίνα αυτού θα είναι $R = \sqrt{\rho^2 - d(K, (\Pi))^2}$ (3).
 Είναι,

$$d(K, (\Pi)) = \frac{|3 \cdot 2 - 2(-2) + 4 - 5|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{9}{\sqrt{14}} \quad (4)$$

$$\text{Από (3), (4), } R = \sqrt{22 - \frac{81}{14}} = \sqrt{\frac{227}{14}}$$

(**) Εξίσωση σφαίρας διερχόμενης από 4 μη συνεπίκεδα σημεία

|| Έστω τέσσερα σημεία, $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$, $P_4(x_4, y_4, z_4)$, μη συνεπίκεδα.

Τότε η εξίσωση της σφαίρας, διερχόμενης από τα σημεία αυτά, είναι:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

Πράγματι, η παραπάνω εξίσωση παριστάνει σφαίρα μιας και αναηγύσσοντας την ορίζουσα ως προς την πρώτη γραμμή, έχω εξίσωση της μορφής:

$$E_1(x^2 + y^2 + z^2) + A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1 = 0, \quad (2)$$

$$\text{όπου } E_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

Αλλά $E_1 \neq 0$ μιας και τα σημεία είναι μη συνεπίκεδα. Συνεπώς, διαίρωντας την (2) με E_1 , παίρνω εξίσωση της μορφής:

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0,$$

δηλαδή εξίσωση σφαίρας.

Έτσι, η (1) παριστάνει σφαίρα που διέρχεται από τα P_1, P_2, P_3, P_4 , γιατί αν αντικαταστήσω σ' αυτήν τα x, y, z

ΜΕ ΤΙΣ ΕΥΝ/ΥΕΣ ΕΝΟΣ ΕΚ ΤΩΝ ΤΕΤΤΟΡΩΝ ΕΠ/ΕΙΩΝ,
Η ΕΞΙΣΤΕΝΘΑ ΘΑ Π/ΠΡΕΙΤΑΙ, ΜΙΑΣ ΚΑΙ Η ΟΡΙΣΘΕΙΑ ΘΑ ΧΕΙ
ΔΥΟ ΥΠΟΛΛΕΣ ΙΣΕΣ.